Fonction polynôme et équation du second degré

1 Définition et vocabulaire

Définition

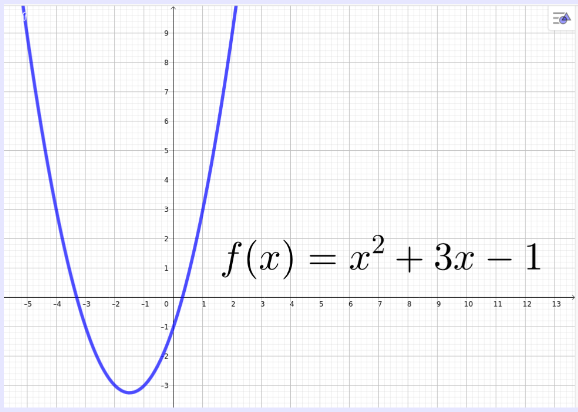
On appelle **fonction polynôme du second degré** toute fonction définie dur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.
a, b et c sont appelés coefficients du polynôme $ax^2 + bx + c$.

- a est le coefficient du terme de degré 2
- b est le coefficient du terme de degré 1
- c est le terme constant.

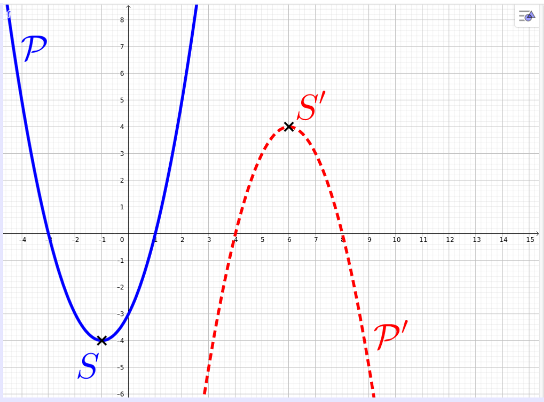
La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée une **parabole**.



Exemples

Définition

On appelle sommet le point "le plus haut" ou le point "le plus bas" de la parabole.
Dans le graphique, S est le sommet de $\mathcal{P}$ et S' est le sommet de $\mathcal{P}'$



Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exemples

2 Forme canonique

Définition

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et p la fonction polynôme du second degré définie par :

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

On appelle discriminant de p le réel défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemples

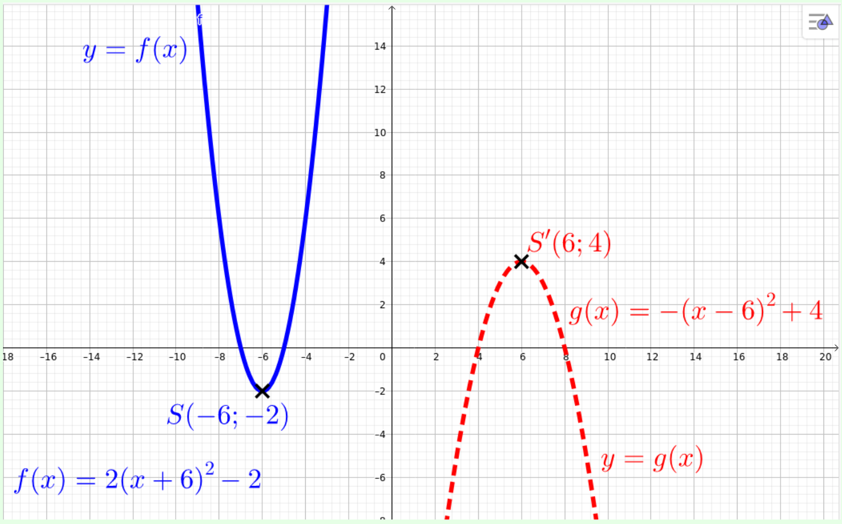
Propriété

Pour toutes fonctions polynômes du second degré définie par $p(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, il existe deux réels α et β tels que :

$$p(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \dfrac{-\Delta}{4a}$

Cette forme est appelé forme canonique de p et le sommet de la parabole représentant p est $S(\alpha, \beta)$.



Démonstration

Exemples

3 Equations du second degré et forme factorisée

3 .1 Racine évidente, factorisation et racine

Définition

On appelle racine de la fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ toute solution de l'équation $f(x) = 0$. C'est à dire toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.
Tout d'abord, f est une fonction polynôme du second degré.
De plus, on remarque $f(1) = 0$, en effet :

$$f(1) = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 2 = 3 - 5 + 2 = 0$$

1 est donc une racine de f.

3 .2 Méthode générale

Propriété

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$, alors il existe deux réels x_1 et x_2 tel que :

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

avec :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ est appelé **forme factorisée** du polynôme.

Dans ce cas, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux et seulement deux solutions réelles distinctes qui sont x_1 et x_2. On les appelle aussi **racines du polynôme**.

- Si $\Delta = 0$, alors il existe un réels x_0 tel que :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2$$

avec :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$a\left(x - x_0\right)^2$ est appelé **forme factorisée** du polynôme.
Dans ce cas, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution réelle qui est x_0. On l'appelle aussi **racine du polynôme**.

- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme n'admet ni racines, ni forme factorisée.

Exemple

Démonstration

4 Relation coefficients/racines

Propriété

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré deux ayant deux racines distinctes x_1 et x_2. On a alors :

- $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$
- $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

Exemple

Démonstration

Propriété

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si il sont solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

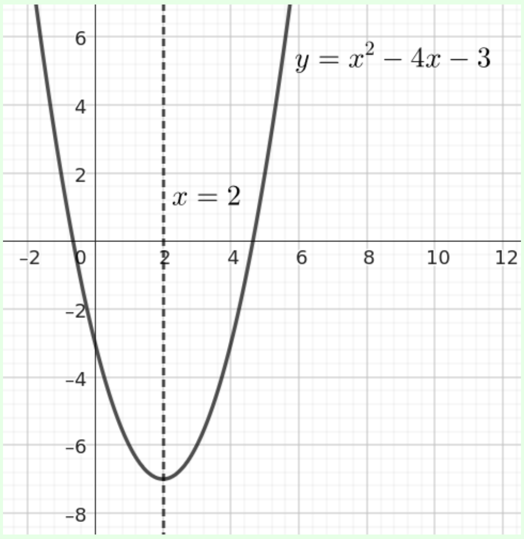
Démonstration

5 Représentations graphiques - axe de symétrie

5 .1 Axe de symétrie

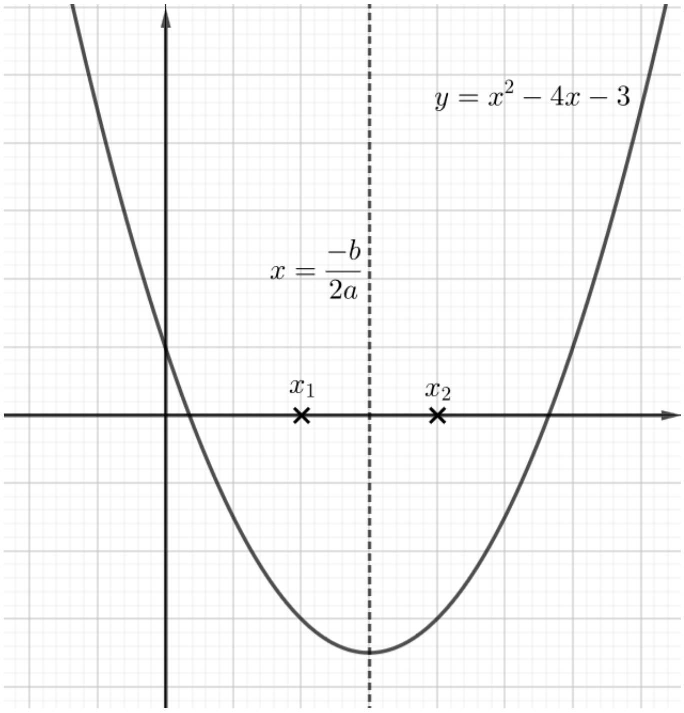
Propriété

La parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ admet la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$ pour axe de symétrie.

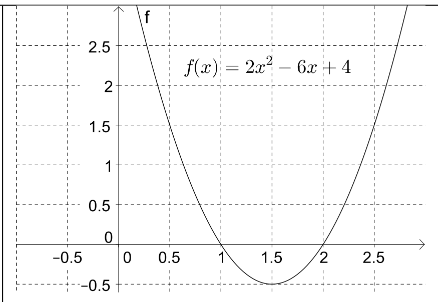
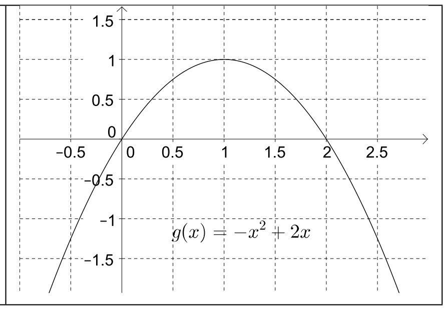
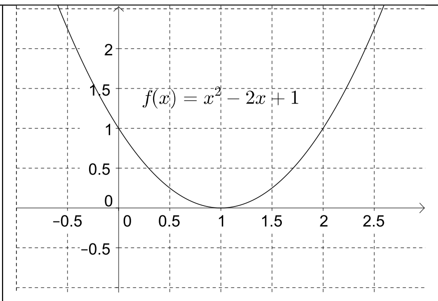
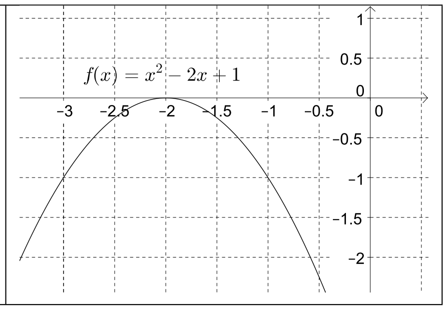


Exemple

Démonstration



5 .2 interprétations graphiques

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$