

TERMINALES SPÉCIALITÉ MATHS : DM1

2024-2025

Suites et limites

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$$

1. Etude de la suite (u_n)

(a) Démontrer que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n .

(b) Montrer que :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$$

(c) Démontrer, par récurrence, que $u_n - 1$ est du même signe que $(-1)^n$ pour tout entier naturel n .

2. Soit (w_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$w_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

(a) Montrer que :

$$w_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$$

(b) En déduire que (w_n) est une suite géométrique.

(c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n .

(d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

(e) Déterminer alors sa limite.