Nombres complexes : Forme algébrique

Exercice 1

Le mathématicien italien Giordano Cardano (Jérôme Cardan pour les francais) a publier au XVI^e sciècle une méthode ayant pour but de résoudre les équations de la forme $x^3 = px + q$
Raphaël Bombelli, un autre mathématicien italien a voulu utiliser cette méthode pour résoudre l'équation **(E)** :

$$x^3 = 15x + 4$$

On va étudier dans cet exercice les calculs de Bombelli.

1. Avec la méthode de Cardan
   (a) On pose $x = a + b$. Démontrer que si $a + b$ est solution de **(E)** alors,
   $$a^3 + b^3 + 3(a + b)(ab - 5) - 4 = 0$$
   (b) L'idée de Cardan est alors d'imposer en plus la condition $ab = 5$.
   Démontrer alors que $A = a^3$ et $B = b^3$ sont solutions du système :
   $$\textbf{(S)} : \left\{ \begin{array}{rcl} A + B & = & 4 \\ A \times B & = & 125 \end{array} \right.$$
   (c) Essayer de résoudre ce système et expliquer le problème rencontrer par Bombelli.
2. L'idée de Bombelli Pour aller plus loin, Bombelli eut l'idée "complètement folle" de faire comme si -121 avait une racine carré qu'il osa noter $11\sqrt{-1}$. Plus tard, Euler nota $\sqrt{-1} = i$, autrement dit, ce nouveau **nombre imaginaire** i vérifie $i^2 = -1$.
   (a) Expliquer pourquoi on peut déduire de la résolution du système (S) que :
   $$(A = 2 + 11i \quad \text{et} \quad B = 2 - 11i) \qquad \text{ou} \qquad (A = 2 - 11i \quad \text{et} \quad B = 2 + 11i)$$
   (b) Développer $(2 + i)^2$ et $(2 + i)^3$. Puis $(2 - i)^2$ et $(2 - i)^3$.
   (c) En déduire deux nombres a et b qui conviennent, puis une solution de **(E)**

Exercice 2

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 4 - 5i$.
Déterminer la forme algébrique de $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$ et $3z_1 + 4z_2$.

Exercice 3

Ecrire sous forme algébrique les complexes suivants :

- $z_1 = (1+3i)+(2-i)$
- $z_2 = (5-i)(7+4i)$
- $\left(\frac{1}{2}-4i\right)-\left(-\frac{3}{2}+2i\right)$
- $\left(\frac{3}{4}i-2\right)-(i+1)$

Exercice 4

On considère les nombres complexes $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 4-5i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $z_1 \times \overline{z_1}$ et $z_2 \times \overline{z_2}$
2. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \times \overline{z}$ est un réel.

Exercice 5

On considère les nombres complexes $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 2-3i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $\frac{1}{z_1}$ et $\frac{1}{z_2}$
2. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$ est la forme algébrique de $\frac{1}{z}$.

Exercice 6

On considère les nombres complexes $z_1 = 2-i$, $z_2 = 2+4i$ et $z_3 = -3-i$.

1. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_2}{z_3}$.
3. Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_3}$.

Exercice 7

Ecrire le conjugué des nombres suivant et donner le résultats sous forme algébrique :

1. $\frac{1}{3i}$
2. $\frac{2-4i}{3+2i}$
3. $(4+5i)^2$
4. $\frac{(3-4i)(4+i)}{2+3i}$

Exercice 8

Ecrire en fonction de $\overline{z}$ le conjugué des expressions suivantes :

1. $z^2 - iz + 3i - 4$
2. $3i + (2 - i)z$
3. $\dfrac{3z + i}{z - i}$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $5z + 2i = (1 + i)z - 3$
2. $\dfrac{z - i}{z + 1} = 4i$
3. $3z(z + i) = -iz$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants :

1. $$\left\{\begin{array}{rcl} z + z' & = & 1 + 4i \\ z - z' & = & 1 - 2i \end{array}\right.$$
2. $$\left\{\begin{array}{rcl} z - z' & = & -2 + i \\ 2z + 3z' & = & 1 \end{array}\right.$$
3. $$\left\{\begin{array}{rcl} iz - 2z' & = & -2 + i \\ z + (1 + i)z' & = & -2i \end{array}\right.$$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + 3 + i = 2\overline{z} + 7 + 3i$
2. $2z - 4 = 5i + 4\overline{z}$
3. $z\overline{z} = z + 2$
4. $\overline{z} - 1 = z\overline{z} - i$

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $4z^2 + 4z + 101 = 0$
2. $z^2 + 2z - 80 = 0$
3. $\dfrac{z^2}{5} - 2z + 5 = 0$

Exercice 13

Factoriser dans $\mathbb{C}$ avec des facteurs du premier degré chacune des expressions suivantes.

1. $P(z) = 4z^2 + 4z + 101$
2. $Q(z) = z^3 - 6z^2 + 13z$
3. $R(z) = (z^2 + 5)(z^2 - z - 1)$

Exercice 14

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - \left(2 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{2}\right) z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - \mathrm{i}\sqrt{2}\right)(z^2 + az + b)$.
   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 15

Soit P le polynôme défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$$

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ a deux solutions imaginaires pures.
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4)$
3. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 16

Soit $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ et Z le nombre complexe défini par $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$.

1. exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$
2. En déduire tous les nombres complexes z tels que Z soit réel.

Exercice 17

Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels défini par $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
on a donc $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$
Démontrer que si P admet une racine complexe z_0, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de P.

Exercice 18

On considère l'équation **(E)** :

$$2z^4 - 5z^2 - 12 = 0$$

1. On pose $Z = z^2$. Résoudre l'équation $2Z^2 - 5Z - 12 = 0$
2. En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de **(E)**.

Exercice 19

soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeur complexes définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1+i)u_n$$

1. Calculer les u_1, u_2 et u_3.
2. Donner la nature de cette suite.
3. Déterminer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 20

1. Soit p le polynôme de degré 3 défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$p(z) = z^3 - z^2(3+2i) + z(6i-5) + 10i$$

   On sait que l'équation $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure. Déterminer cette solution.

2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - 2\mathrm{i})\left(z^2 + az + b\right)$.

   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 21

soit z et z' deux complexes tels que $z\overline{z} = 1$ et $z'\overline{z'} = 1$ et a un réel.
On note :

$$Z = z + z' + azz' + 1 \text{ et } Z' = z + z' + a + zz'$$

1. Montrer que $Z' = zz'\overline{Z}$.
2. On suppose que $1 + zz' \neq 0$. Montrer que le nombre $u = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

Exercice 22

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - ni^n - (n+1)i^{n+1}}{2}$$

En déduire les sommes réelles :

- $S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^p(2p+1)$
- $S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \ldots + (-1)^{p+1}2p$