Nombres complexes : Forme algébrique

Le mathématicien italien Giordano Cardano (Jérôme Cardan pour les francais) a publier au XVI^e sciècle une méthode ayant pour but de résoudre les équations de la forme $x^3 = px + q$
Raphaël Bombelli, un autre mathématicien italien a voulu utiliser cette méthode pour résoudre l'équation suivante :

$$x^3 = 15x + 4$$

Bombelli eut l'idée "complètement folle" de faire comme si -121 avait une racine carré qu'il osa noter $11\sqrt{-1}$.
Plus tard, Euler nota i le nombre tel que $i^2 = -1$, autrement dit, ce nouveau est un **nombre imaginaire**. Néanmoins, cette idée folle lui permit de trouver les 3 solutions réelles de l'équation dont $x = 4$.
De nouveaux nombres ont donc été crée, on les appela les nombres complexes.

I Forme algébrique

Définition

Il existe un ensemble note $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
- L'addition et la multiplication de deux nombres réels se prolonge dans $\mathbb{C}$ et les régles de calculs restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe, **noté** i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ ou a et b sont deux réels. Cette écriture est appelé **forme algébrique** de z.

Exemples

Remarque

- On dit que a est la partie réel de z et on écrit $a = \operatorname{Re} z$.
- On dit que b est la partie imaginaire de z et on écrit $b = \operatorname{Im} z$
- Tout nombre complexe de la forme ib ou $b \in \mathbb{R}$ est appelé imaginaire pur.
- $(-i)^2 = -i \times (-i) = i \times i = i^2 = -1$

Propriétés

- Un nombre complexe z est réel si et seulement si $\operatorname{Im} z = 0$.
- Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\operatorname{Re} z = 0$.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imagimaire

Définition

Le conjugué d'un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$ est le nombre complexe, **noté** $\overline{z}$ défini par :

$$\overline{z} = a - ib$$

Exemples

Remarques

- Pour tout nombre réel a, on a $\overline{a} = a$
- pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$

Propriétés

- Le nombre complexe z est réel si et seulement si $z - \overline{z} = 0$.
- Le nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z + \overline{z} = 0$.

Propriétés

Pour tout nombre complexe z, on a :

- $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$
- $z\overline{z} = 0$ si et seulement si $z = 0$

Exemples

Démonstration

II Opérations sur les nombres conjugués

Théorème

Soient z_0 et z_1 deux nombres complexes. et n un entier relatif non nul

1. $\overline{z_0 + z_1} = \overline{z_0} + \overline{z_1}$
2. $\overline{z_0 \times z_1} = \overline{z_0} \times \overline{z_1}$
3. Avec $z_1 \neq 0$, on a $\overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z_1}}$
4. Avec $z_1 \neq 0$, on a $\overline{\left(\dfrac{z_0}{z_1}\right)} = \dfrac{\overline{z_0}}{\overline{z_1}}$
5. $\overline{z_0^n} = \overline{z_0}^n$

Remarque

Pour tout nombre complexe non nul z, on a $z^0 = 1$

Exemples

Démonstration

III Equation du second degrés

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, c'est trouver toutes les solutions complexes de cette équation.

Théorème

Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$ a toujours des solutions.
On note Δ le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation une solutions double réelle : $z = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées l'une de l'autre.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Remarque

La démonstration de cette propriété est faite sur le même principe que celle faite dans $\mathbb{R}$ en utilisant la forme canonique du polynôme.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 8z + 20 = 0$

Correction