Vecteurs, droites et plan de l'espace

I Caractérisations vectorielles

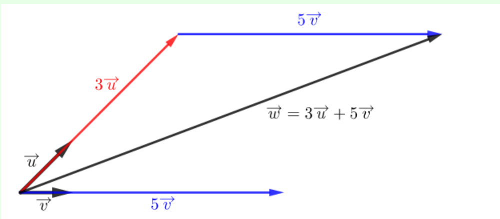
Remarque
On étend les définitions et opérations sur les vecteurs du plan vues en première aux vecteurs de l'espace.

1 Vecteurs coplanaires

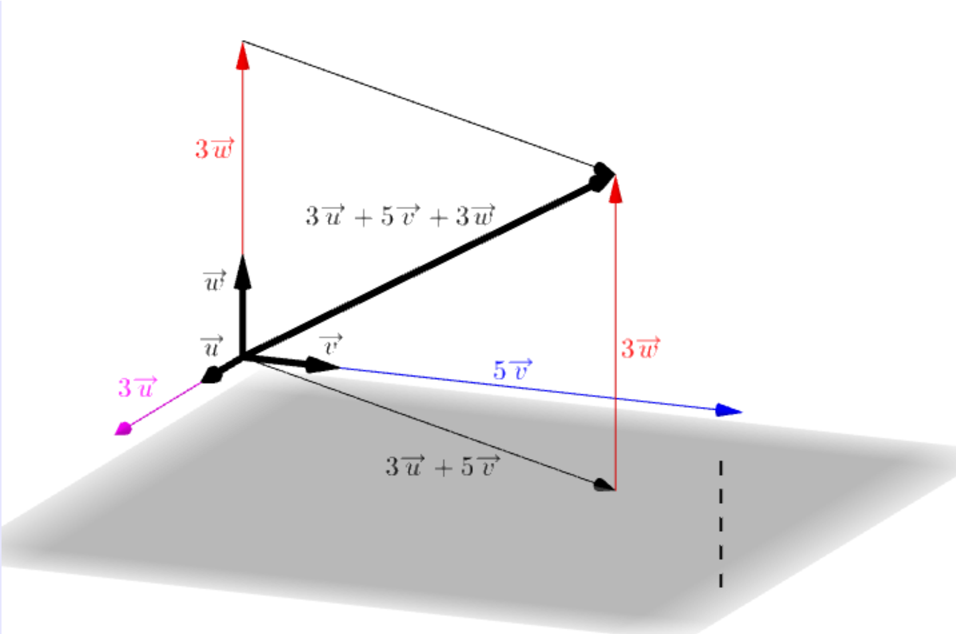
Remarque
En classe de première, un plan est défini par un point et deux vecteurs non colinéaires. Ce point complété par ces deux vecteurs défini un repère du plan.

Définition
Trois vecteurs sont coplanaires si et seulement s'ils ont des représentants dans un même plan.

Propriété
Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires.
$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe une couple de réel (α, β) tel que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.



Définition
Si trois vecteurs ne sont pas coplanaires, alors ils définissent une base de l'espace. C'est à dire que tout vecteur de l'espace peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des trois vecteurs de la base.
En clair, soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout vecteurs $\overrightarrow{t}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{t} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$.



2 Repères de l'espace

Définition

On appelle repère de l'espace tout ensemble $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est un point et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
Dans ce cas, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ étant non coplanaires, pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
x, y et z sont alors appelée coordonnées de M dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Exemple

II Droites et plan de l'espace

1 Droites de l'espace

Définition

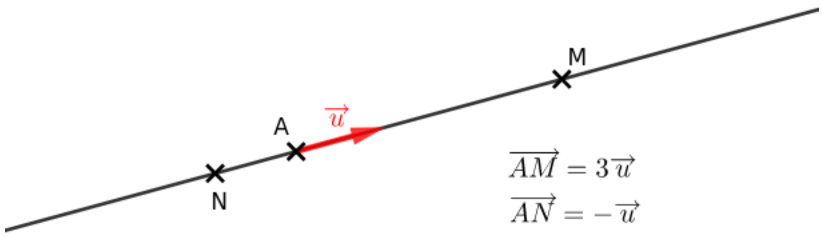
Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.
On appelle droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ l'ensemble des points M du plan tel qu'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$$

Remarque

En effet, si M est un point de la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires et par conséquent il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$$



Remarque

Soit A et B deux points distincts, la droite (AB) est donc la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$

Définition

Caractérisation paramétrique d'une droite :
Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace et (d) la droite passant par le point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$.
$M\,(x, y, z)$ appartient à (d) si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + k\alpha \\ y & = & y_A + k\beta \\ z & = & z_A + k\gamma \end{array}\right. ,k \in \mathbb{R}$$

Ce système d'équation est appelé une représentation paramétrique de (d).

Démonstration

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace et (d) la droite passant par le point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(\alpha, \beta, \gamma)$.
D'après la définition des droites, $M\,(x, y, z)$ est un point de (d) si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$.
or

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k\alpha \\ k\beta \\ k\gamma \end{pmatrix}$$

d'où

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - x_A & = & k\alpha \\ y - y_A & = & k\beta \\ z - z_A & = & k\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_A + k\alpha \\ y & = & y_A + k\beta \\ z & = & z_A + k\gamma \end{array}\right.$$

Donc $M\,(x, y, z)$ appartient à (d) si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_A + k\alpha \\ y & = & y_A + k\beta \\ z & = & z_A + k\gamma \end{array}\right.$$

2 Positions relatives de deux droites

2 .1 Droites parallèles

Définition

Deux droites parallèles sont deux droites qui ont la même direction, c'est à dire que tout vecteur directeur de l'une est aussi un vecteur directeur de l'autre.

Remarque

Deux droites confondues sont, de part la définition, parallèles.
Lorsque deux droites sont parallèles sans être confondues, on dira qu'elles sont strictement parallèles.

Exemple

Propriété

Deux droites **parallèles** sont obligatoirement **coplanaires**, c'est à dire qu'elles sont toutes les deux incluses dans un même plan.

2 .2 Droites sécantes

Définition

Deux droites sécantes sont deux droites qui ont un, et un seul, point en commun.

Propriété

Deux droites sécantes sont obligatoirement coplanaires, c'est à dire qu'elles sont toutes les deux incluses dans un même plan.

Remarque

Dans l'espace, il existe des droites qui ne sont ni parallèles, ni sécantes.
Dans ce cas, on dira qu'elles ne sont **pas coplanaires**.

Exemple

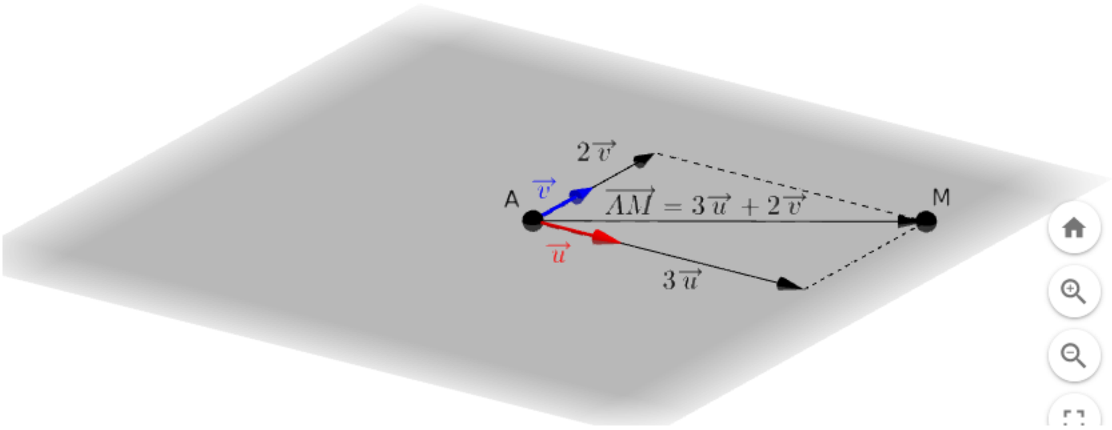
3 Plan de l'espace

3 .1 Plan de l'espace

Définition

Soit A un point de l'espace et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un couple de vecteurs non colinéaires.
On appelle plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ l'ensemble des points M du plan tel qu'il existe deux réels k et h tels que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} + h\overrightarrow{v}$$



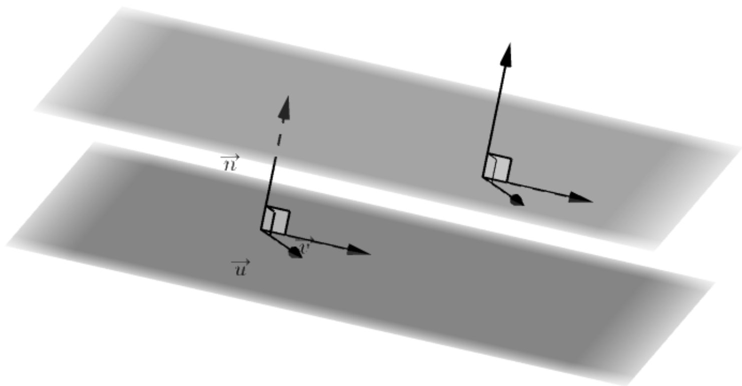
Remarque

Soit A, B et C trois points non alignés, le plan (ABC) est donc le plan passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3 .2 Positions relatives de deux plans

Définition

position relatives de deux plans :
Deux plans sont parallèles si et seulement si les vecteurs directeurs de l'un peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs directeurs de l'autre.
Autrement dit, si et seulement si les deux vecteurs directeur de l'un sont coplanaires avec les deux vecteurs directeurs de l'autre.



Remarque

Deux plans confondus sont, de part la définition, parallèles.
Lorsque deux plans sont parallèles sans être confondus, on dira qu'ils sont strictement parallèles.

Définition

Caractérisation paramétrique d'un plan :
Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace et $(\mathcal{P})$ le plan passant par le point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\,(\alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$ et $\overrightarrow{v}\,(\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$.
$M\,(x, y, z)$ appartient à $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe $(k, h) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_A + k\alpha_u + h\alpha_v \\ y & = & y_A + k\beta_u + h\beta_v \\ z & = & z_A + k\alpha_u + h\beta_v \end{array}\right. ,(k, h) \in \mathbb{R}^2$$

Ce système d'équation est appelé une représentation paramétrique de $(\mathcal{P})$.

Démonstration

Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace et $(\mathcal{P})$ le plan passant par le point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\,(\alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$ et $\overrightarrow{v}\,(\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$.
D'après la définition des plans, $M\,(x, y, z)$ est un point de $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe deux réels k et h tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} + h\overrightarrow{v}$.
or

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad k\overrightarrow{u} + h\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} k\alpha_u + h\alpha_u \\ k\beta + h\beta_v \\ k\gamma + h\gamma_v \end{pmatrix}$$

d'où

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u} + h\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x - x_A & = & k\alpha_u + h\alpha_u \\ y - y_A & = & k\beta + h\beta_v \\ z - z_A & = & k\gamma + h\gamma_v \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + k\alpha_u + h\alpha_u \\ y & = & y_A + k\beta + h\beta_v \\ z & = & z_A + k\gamma + h\gamma_v \end{array} \right.$$

Donc $M\,(x, y, z)$ appartient à $(\mathcal{P})$ si et seulement si il existe $(k, h) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_A + k\alpha_u + h\alpha_v \\ y & = & y_A + k\beta_u + h\beta_v \\ z & = & z_A + k\alpha_u + h\beta_v \end{array} \right.$$