Terminale Maths Expert - INT2 : Nombres complexes

2024-2025

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donner le résultat sous forme algébrique :

1. $3(z+i) = 2i(1+iz)$
2. $z^2 + 4z + 13 = 0$
3. $z\overline{z} + 2 = 3iz - \overline{z}$

Exercice 2

Les affirmations suivantes son-elles vraies ou fausses (Toutes réponses non justifiées ne rapportent aucun points) :

1. Soient a et b deux nombres réels.
   Les nombres complexes $z_1 = a\,(a-1)) + i(b^2+1)$ et $z_2 = a - 1 + 2ib$ sont conjugué pour un unique couple $(a; b)$.
2. Quel que soit le réel a, le nombre complexe $z = \dfrac{3i - a}{1 + 3ai}$ est un nombre réel.

Exercice 3

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = 4z^4 - 16z^3 + 32z^2 - 40z + 25.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$
Soit Q le polynôme définit par :

$$Q(Z) = Z^2 - 4Z + 3$$

1. Déterminer la forme factorisée de $Q(Z)$.
2. (a) Justifier que 0 n'est pas une solution de $P(z) = 0$
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$
   Montrer que $P(z) = 0$ si et seulement si $\left(z + \dfrac{5}{2z}\right)^2 - 4\left(z + \dfrac{5}{2z}\right) + 3 = 0$
3. Déduire des questions précédentes que $p(z) = 0$ si et seulement si $z + \dfrac{5}{2z} = 1$ ou $z + \dfrac{5}{2z} = 3$.
4. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $z + \dfrac{5}{2z} = 1$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $z + \dfrac{5}{2z} = 3$
5. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.