Limites de fonctions

I limites de fonctions

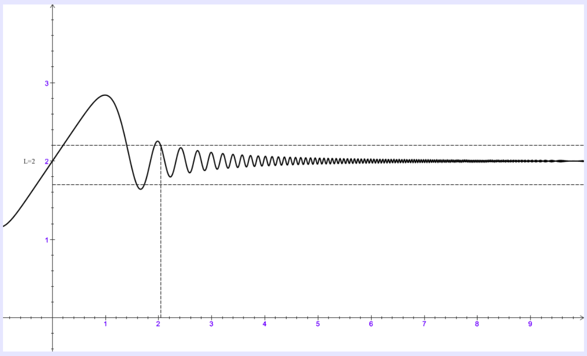
1 Limite finie en $+\infty$

Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.
On dit que la fonction f a pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand . On écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

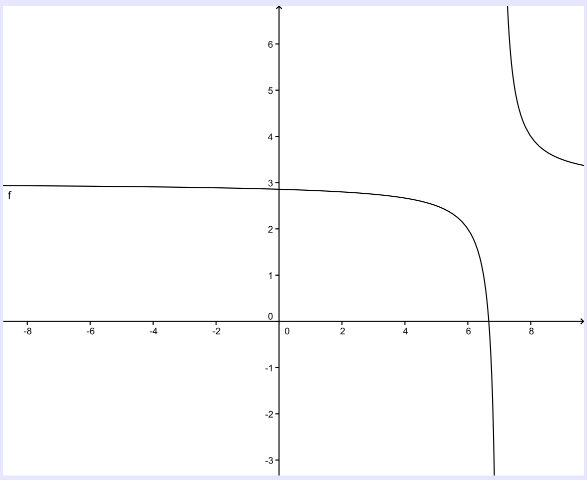


Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty;a[$.
On dit que la fonction f a pour limite L en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez petit . On écrit :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $-\infty$.

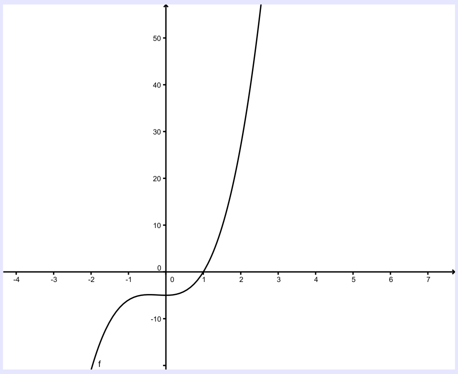


2 Limite infinie en $+\infty$

Définition

Soit L un réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a;+\infty[$.
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand . On écrit :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$



Remarque

On définie de même

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

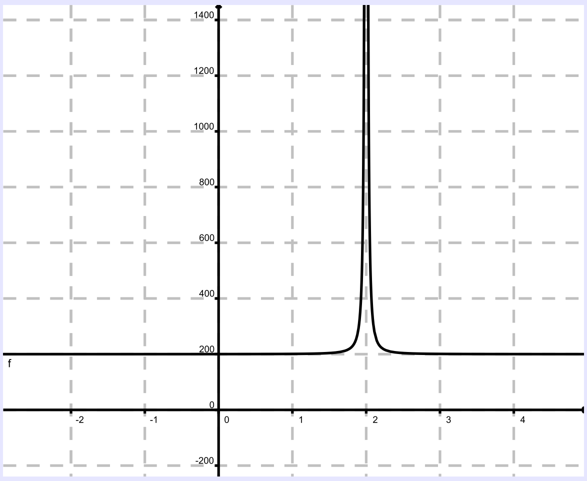
3 Limite infinie en a

Définition

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle du type $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On écrit :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

Dans ce cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.



Remarques

- On définie de même $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$
- On définie de même $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) = +\infty$
- On définie de même $\lim\limits_{x\to a, x<a} f(x) = +\infty$
- Dans ces trois dernier cas, la droite d'équation $x = a$ est aussi une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

II Opération sur les limites

1 limites des fonctions de références

Fonction	limite			
$f(x)=k$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=k$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=k$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=k$	
$f(x)=x$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$		
$\forall p\in\mathbb{N}^*, f(x)=x^{2p}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$		
$\forall p\in\mathbb{N}, f(x)=x^{2p+1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$		
$\forall p\in\mathbb{N}^*, f(x)=\dfrac{1}{x^{2p}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x)=+\infty$
$\forall p\in\mathbb{N}^*, f(x)=\dfrac{1}{x^{2p+1}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x)=-\infty$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$		
$f(x)=e^x$	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$		

2 Opération sur les limites

Soient f et g deux fonctions. Soient m et n deux réels.

Limite de la somme de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	m	m	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	n	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x)$	$m+n$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	? ?

Limite du produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	m	$m>0$ ou $+\infty$	$m<0$ ou $-\infty$	$m>0$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	n	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$	$m\times n$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$m<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f\times g)(x)$	$+\infty$	? ?

Limite du quotient de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	m	m	0	$m>0$ ou $+\infty$	$m>0$ ou $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	$n\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0 avec $g>0$	0 avec $g<0$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f}{g}(x)$	$\dfrac{m}{n}$	0	? ?	$+\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	$n \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f}{g}(x)$	$+\infty$ si $n > 0$ et $-\infty$ si $n < 0$	? ?

Remarques

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ de toutes fonctions polynômes est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ de toute fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

III Limite de fonction composée

Propriété

Soit u et v deux fonctions telles que la fonction $u \circ v$ soit définie sur un ensemble D. Soit a, b, et c trois réel, ou$-\infty$ ou $+\infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} v(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} u(x) = c$, alors $\lim\limits_{x\to a} u \circ v = c$

Exemple

L'objectif est de déterminer la imite quand x tant vers $+\infty$ de $\sqrt{\dfrac{4x^2+1}{x^2}}$

IV Limites et ordre

Propriété

Soit α un réel

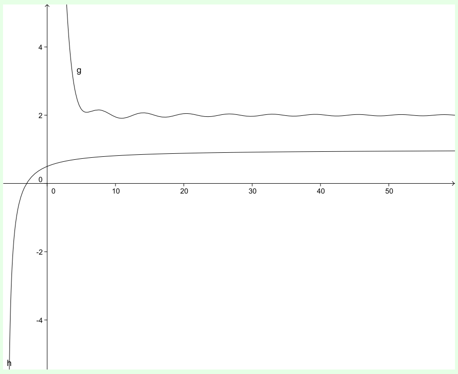
Soit f et g deux fonctions définies sur $]\alpha, +\infty[$ et telles que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = b$$

Si pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$, alors :

$$a \leqslant b$$



Exemple

Théorème des gendarmes

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit f, g et h trois fonctions définies sur des ensembles contenant un l'intervalle $]\alpha; +\infty[$.

Si pour tout x appartenant à $]\alpha; +\infty[$:

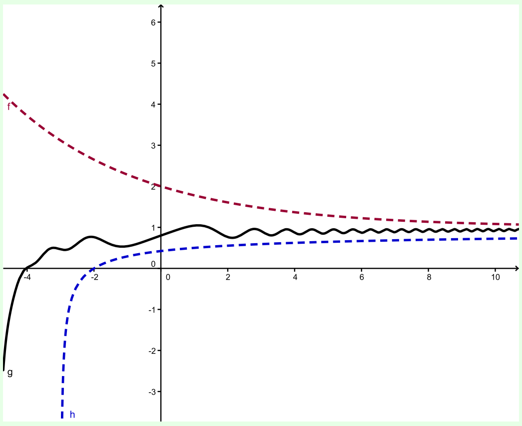
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = a$$

Alors

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = a$$



Exemple

1 Croissance comparée

Propriétés

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
2. Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
3. Pour tout entier naturel n, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x \times x^n = 0$

Exemple

Démonstration