I Nombre dérivé et tangente

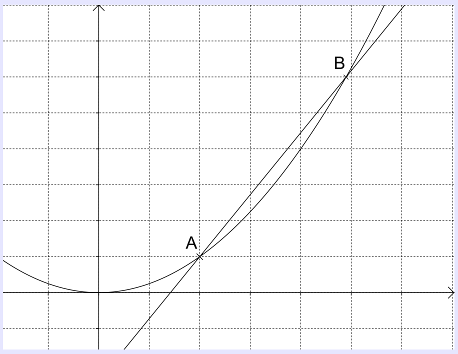
1 Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ et c un réel appartenant à $\mathcal{I}$.
Soit h un réel non nul tel que $c+h$ appartienne à $\mathcal{I}$.
On appelle taux d'accroissement (ou taux de variation) de f entre c et $c+h$ le réel définie par :

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Ce réel correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $c+h$ et c.



Exemple

Si f est la fonction carré, c'est à dire que pour tout $x\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.
Avec $c=1$ et $h=2$, on a le taux d'accroissement de f entre 1 et 1+2 qui est le réel :

$$\frac{f(1+2)-f(1)}{2+1-1}=\frac{f(3)-f(1)}{2}=\frac{3^2-1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$$

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ et a un élément de $\mathcal{I}$. On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel L tel que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers L lorsque h tend vers 0.
Dans ce cas, L est appelé nombre dérivé de f en a et on l'écrit $f'(a)$. d'où :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

dans ce cas, on a aussi :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

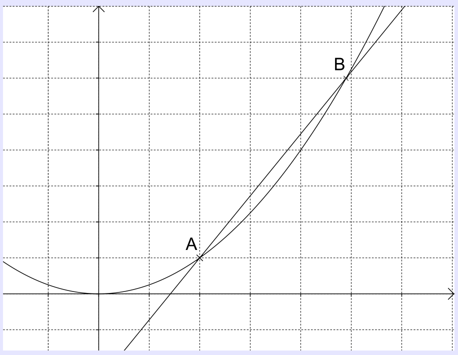
Exemple

Si f est la fonction carré, on a, pour tout $h \neq 0$:
$\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2-2^2}{h} = \dfrac{4h+h^2}{h} = 4+h$
or $\lim\limits_{x\to 0}(4+h) = 0$
Donc f est dérivable en 2 et on a $f'(2) = 4$

2 Tangente à une courbe

Définition

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ et a un réel appartenant à $\mathcal{I}$ tel que f est dérivable en a.
On appelle tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(a; f(a))$ la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$.



Propriété

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ et a un réel appartenant à $\mathcal{I}$ tel que f est dérivable en a.
La tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(a; f(a))$ à pour équation :

$$y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$$

Démonstration

Soit $\mathcal{T}_a$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(a; f(a))$.
Par définition, $\mathcal{T}_a$ a pour coefficient directeur $f'(a)$, donc il existe un réel b tel que $\mathcal{T}_a$ a pour équation :

$$y = f'(a) \times x + b$$

De plus $\mathcal{T}_a$ passe par le point $A(a; f(a))$, donc :

$$y_a = f'(a) \times x_a + b \quad \text{, d'où} \quad b = y_a - f'(a) \times x_a$$

ou encore, $b = f(a) - f'(a) \times a$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_a :\quad & y = f'(a)\times x + b\\ & y = f'(a)\times x + f(a) - f'(a)\times a\\ & y = f'(a)\times x - f'(a)\times a + f(a)\\ & y = f'(a)\times(x-a) + f(a)\end{aligned}$$

II Fonction dérivée

1 Dérivée des fonctions de références

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathcal{I}$
On dit que f est dérivable sur $\mathcal{I}$ si elle est dérivable en tout point de $\mathcal{I}$.
Dans ce cas, la fonction qui à tout x de $\mathcal{I}$ associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f. On la note f'.

Propriétés

Soit a et b deux réels et n un entier relatif non nul.

Fonction	Ensemble de définition	Dérivée	ensemble de dérivabilité
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$

Démonstration

- Fonction carré :
  Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

- Fonction inverse :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2 Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions

Propriétés

Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I et (a, b) un couple de réels. La fonction f définie dans le tableau suivant est dérivable sur I dans tout les cas suivants :

Fonction	Dérivée
$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
$f(x) = a \times u(x)$	$f'(x) = a \times u'(x)$
$f(x) = u(x) \times v(x)$	$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ et $u(x) \neq 0$ sur I	$f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ et $v(x) \neq 0$ sur I	$f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$
$f(x) = u(ax + b)$ tel que $ax + b \in I$	$f'(x) = a \times u'(ax + b)$

Démonstration

Dérivé d'un produit :
Soient u et v deux fonctions définies sur un intervalle I.
Soient c un réel appartenant à I et h un réel tel que $c + h$ appartienne aussi à I.