Dénombrement

Exercice 1

On considère les ensembles $A = \{7; 8; 14; 21\}$ et $B = \{5; 16; 14; 25; 123\}$
Donner les éléments de $A \cap B$ et ceux de $A \cup B$

Exercice 2

oient A et B deux ensembles tels que $\text{card}(A) = 15$, $\text{card}(B) = 7$
Donner $\text{card}(A \cup B)$ et $\text{card}(A \times B)$ dans les deux cas suivants :

1. Si A et B sont disjoints
2. Si $\text{card}(A \cap B) = 3$

Exercice 3

'adresse IP est un numéro qui identifie chaque ordinateur connecté à internet.
Une adresse de type IPv4 est composée de quatre nombres compris entre 0 et 255 inclus.

1. Est-ce suffisant pour identifier 5 milliards d'ordinateur de manière unique ?
2. De nouvelle adresse, de type IPv6, utilisant 6 nombres compris entre 0 et 255 inclus ont été creée. Combien d'adresse IPv6 existe-t-il ?

Exercice 4

On construit des nombres à n chiffres en utilisant uniquement les chiffres 1,2,3 et 4. On souhaite construire au moins 1000 nombres différents.

1. Cette contrainte est-elle respectée lorsque $n = 2$? lorsque $n = 3$?
2. Déterminer la valeur minimale de n pour respectée la contrainte de l'énoncé.

Exercice 5

Dans une association sportive de 84 membres, 60 personnes font du football et 42 font du basket-ball.
Combien pratique les deux sport sachant que tout le monde en pratique au moins un ?

Exercice 6

Soient A et B deux ensembles.
On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble noté $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Avec un diagramme, représenté les ensembles A et B et y hachurer la zone correspondant à $A\Delta B$.
2. Montrer que :
$$\operatorname{card}(A\Delta B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - 2\operatorname{card}(A \cap B)$$

Exercice 7

Soient A et B deux ensembles finis et disjoints. On sait que $\operatorname{card}(A \cup B) = 23$ et $\operatorname{card}(A \times B) = 132$.
Déterminer $\operatorname{card}(A)$ et $\operatorname{card}(B)$ sachant que $\operatorname{card}(A) < \operatorname{card}(B)$

Exercice 8

Un restaurant propose quatre entrées, deux plats et trois desserts. Trois menus sont proposés : un menu entrée-plat-dessert, un entrée-plat et un plat-dessert.
Combien de menu différent peut-on composer ?

Exercice 9

On considère les lettres A, B, C et D.

1. Combien de mots de quatre lettres peut-on écrire, ces lettres pouvant être utilisées plusieurs fois ? On ne fera pas attention au sens du mot.
2. Combien de mots de cinq lettres peut-on écrire ?
3. Combien de mots de 6 lettres peut-on écrire ?

Exercice 10

On souhaite construire de nouveaux mots avec les lettres du mot MATHS. On ne se souciera pas de savoir si les mots obtenu ont un sens ou non. Chaque lettre ne peut être utilisée qu'une seule fois.

1. Combien de mots de 3 lettres peut-on construire :
   (a) sans restriction ?
   (b) sachant que A est en première position ?
   (c) sans utiliser la lettre T ?
2. combien de mots de 5 lettres peut-on construire ?
   (a) sans restriction ?
   (b) sachant que T est en troisième position et la lettre S en dernière position ?

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les nombres suivants :

1. $(n+1) \times n!$
2. $\dfrac{(n-5)!}{(n-7)!}$, avec $n \geqslant 7$

3. $\dfrac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}$

4. $\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

Exercice 12

Combien d'entier naturel distincts pourrait-on constituer avec trois chiffres choisis entre 0 et 9 inclus dans chacun des cas suivants :

1. Chaque chiffre pouvant être utilisé plusieurs fois.
2. Chaque chiffre ne pouvant être utilisé qu'une seule fois.

Exercice 13

On considère l'ensemble $F = \{a, b, c, d, e\}$

1. Donner tous les sous ensemble de F de cardinal 3
2. En déduire $\binom{5}{3}$

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les nombres suivants :

1. $\dfrac{n! \times (n+2)!}{(n!)^2}$
2. $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n-1)!}$, avec $n \geqslant 1$
3. $\dfrac{\big(2(n+1)\big)!}{(2n+1)!}$
4. $\dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$, avec $n \geqslant 2$

Exercice 15

Sur une grille de loto, un joueur choisit cinq nombres entre 1 et 49 puis un nombre chance entre 1 et 10.
Combien existe-il de grilles de loto possibles ?

Exercice 16

On lance un dé à six faces, numéroté de 1 à 6, sept fois de suite et on note à chaque lancer 1 si on obtient la face numéroté 6 et 0 dans les autres cas. On obtient donc un 7-uplet.

1. Dénombrement :
   (a) Justifier que chaque issue peut être associée une combinaison et donner la combinaison associée aux issues :
      - A : "seuls le premier et le 5ème dés ont donné le résultat 6".
      - B : "seuls les premier, deuxième, 4ième et 7ième dés ont donné le résultat 6".

   (b) En déduire le nombre d'issue de cette expérience ?

(c) On considère l'événement : "On a obtenu 4 fois le nombre 6".
Donner le nombre d'issues qui réalisent cet événement ?

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque issue associe le nombre de fois que l'on obtient le nombre 6.
   (a) Donner la probabilité que seuls les 4 premiers lancers donne 6. (Vous pourrez vous aider d'un arbre de probabilité).
   (b) Donner la probabilité que seuls les lancers 2, 4, 5 et 7 donnent un 6.
   (c) Déduire des questions précédentes la probabilité d'obtenir exactement 4 fois le nombre 6, c'est à dire $P(X = 4)$.

Exercice 17

Soit n un entier naturel dont la décomposition en produit de facteurs premiers est :

$$n = n_1^{p_1} \times n_2^{p_2} \times ... \times n_k^{p_k}$$

Par exemple, $18 = 2^1 \times 3^2$ et pour 18, on a $n_1 = 1$, $p_1 = 1$, $n_2 = 3$ et $p_2 = 2$.
Avec 25, on a $25 = 5^2$ d'où $n_1 = 5$, $p_1 = 2$

1. Combien de diviseurs positifs possède 18 ? et 25 ?
2. Dans le cas général, combien de diviseur positifs possède n ?
3. Donner le nombre de diviseurs positifs de 120.
4. Quel est le plus petit entier naturel ayant exactement 35 diviseurs positifs et dont la décomposition en nombre premiers fait intervenir au moins deux facteurs premiers distincts ?

Exercice 18

La pocker se joue avec un jeu de 32 cartes, chaque carte possédant une valeur (7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As) ainsi qu'une couleur (trêfle, carreau, coeur, pique).

1. Au départ, chaque joueur possède une "main" de 5 cartes.
   (a) Combien de mains différentes existe-t-il ?
   (b) Combien de mains ne comportant que des piques ?
   (c) Combien de mains ayant exactement 4 carreaux ?
   (d) Combien de main possède un carré d'as ?
   (e) Combien de main possède un carré ?
2. Déduire de la question 1 les probabilités des événements suivants :
   (a) La probabilité d'avoir toutes ces cartes de la même couleur ?
   (b) La probabilité d'avoir un carré ?

Exercice 19

On considère trois ensembles A, B et C.

1. La distributivité de $\cap$ sur $\cup$
   (a) Soit x un élément $(A \cup B) \cap C$.

Démontrer alors que x appartient à $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

(b) Réciproquement, soit x un élément de $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Démontrer alors que x appartient à $(A \cup B) \cap C$

(c) Que peut-on conclure des deux questions précédentes ?

2. En admettant que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$, démontrer que :
$\text{card}(A\cup B\cup C) = \text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)-\text{card}(B\cap C)$
$+ \text{card}(A \cap B \cap C)$

Exercice 20

A leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.
Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Exercice 21

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués.
Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

Exercice 22

On trace dans un plan $n \geqslant 3$ droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes).
Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

Exercice 23

Une course oppose 20 concurrents, dont Émile.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y-a-t-il de podiums possibles où Émile est premier ?
3. Combien y-a-t-il de podiums possibles dont Émile fait partie ?
4. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un prix identique à chacun. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Exercice 24

Dans une ville, il y a quatre boulangeries qui ferment un jour par semaine.

1. Déterminer le nombre de possibilité d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie.
2. Déterminer le nombre de possibilité d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie si plusieurs boulangeries ne peuvent fermer le même jour.
3. Déterminer le nombre de possibilité d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à

chaque boulangerie si chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

Exercice 25

Une entreprise comporte 18 employés, dont 8 femmes. Pour un sondage, on choisit 3 personnes au hasard. Quel est le nombre d'échantillons comportant au moins 2 hommes ?

Exercice 26

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4
2. Dans les questions suivantes, on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6

Exercice 27

On dispose de 4 hélicoptères de tourisme, de 4 pilotes et de 8 hôtesses de l'air. Combien de possibilités différentes y a-t-il d'attribuer les pilotes et hôtesses de l'air aux hélicoptères de manière que chaque hélicoptère ait un pilote et deux hôtesses de l'air ?

Exercice 28

Dans mon armoire, il y a 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures marrons et 2 paires de chaussures blanches. Je peux distinguer toutes ces chaussures les unes des autres. Un matin, mal réveillé, je choisis deux chaussures au hasard.

1. Combien y-a-t-il de choix possibles ?
2. Combien y-a-t-il de choix où j'obtiens deux chaussures de même couleur ?
3. Combien de choix amènent un pied gauche et un pied droit ?
4. Combien de choix amènent une chaussure droite et une chaussure gauche de même couleur ?
5. Combien de choix amènent à deux chaussures qui ne sont pas de la même paire ?