Somme de variables aléatoires

I Rappel

Définition

On appelle variable aléatoire X associée à une expérience aléatoire sur Ω toute fonction définie sur Ω qui à chaque issue w de Ω associe un réel $X(w)$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

Exemple

On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la somme des résultats obtenus.
X peut donc être représentée par le tableau suivant où chaque case représente une issue de l'expérience aléatoire :

2^{e} dé \1er dé	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

C'est à dire : $X\big((2;4)\big) =$, $X\big((1;5)\big) =$. ou encore $X\big((1;1)\big) =$
En considérant que l'on est dans une situation d'équiprobabilité, on aura :

$$P(X = 4) =$$

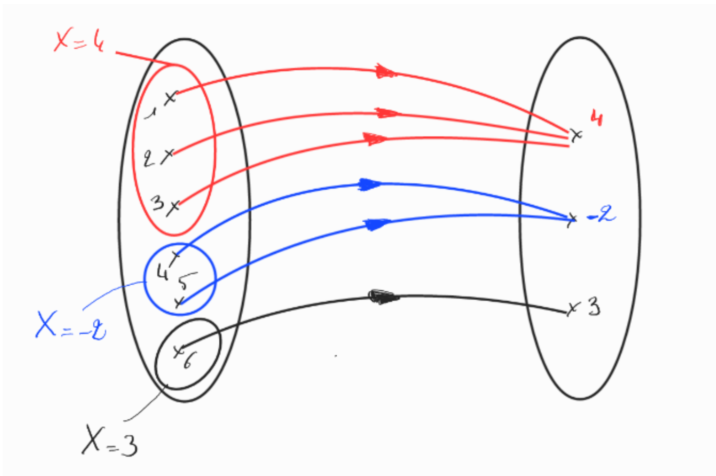
Remarque

En définissant une variable aléatoire sur un univers Ω, on réalise une partition de l'univers.
En effet, si $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ sont les valeurs prisent par la variable aléatoire X, alors :

- $(X = x_0) \cup (X = x_1) \cup ... \cup (X = x_n) = \Omega$
- Pour tout entiers naturels i et j inférieur à n tels que $i \neq j$ on a $(X = x_i) \cap (X = x_j) = \emptyset$

On lance un dé à 6 faces.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue 4 si le résultat est inférieur où égale à 3, -2 si le résultat est 4 ou 5 et 3 si le résultat est 6.
Cette situation est représentée par le schéma ci-dessous.



On a donc $X(1) =\quad$, $X(2) =\quad$, $X(3) =\quad$ et pour tout $i \notin \{1;2;3\}$, $P(\{i\}) \neq\quad$.
D'où $P(X = 4) =$

Propriété

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω.
Soit $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ l'ensemble des valeurs prisent par la variable aléatoire X et $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ leur probabilités respectives. On a donc $P(X = x_i) = p_i$.
On a alors :

- $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
- $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2$ ou encore $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II Somme de variables aléatoires

Dans ce chapitre, X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini Ω.

1 Définition

Définition

$Z = X + Y$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $Z(w) = X(w) + Y(w)$.
$T = aX$ est la variable aléatoire définie sur Ω par $T(w) = a \times X(w)$.

Exemples

L'exemple vu au I peut aussi être modélisé en utilisant la somme de deux variables aléatoires comme ci-dessous.
On lance deux fois de suite un dé à 6 faces.
Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du premier dé et Y celle qui associe a chaque issue le résultat du second dé.
La variable aléatoire $Z = X + Y$ associe donc à chaque issue la somme des deux dés.
De même, la variable aléatoire $T = 3X$ associe à chaque issue le triple du résultat du premier dé.
$Z = X + Y$ et $T = 3X$ peuvent peut donc être représentées par les tableaux suivants :

2^e dé \ 1^{er} dé	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2^e dé \ 1^{er} dé	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2 Espérance et Variance de somme de variables aléatoires

Propriété (Admise)

X étant une variable aléatoire définie sur un univers Ω, on a :

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) X(\omega)$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque issue la valeur 5 si le résultat est supérieur ou égale à 5 et 1 dans le cas contraire.
Le tableau suivant résume bien la situation.

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$						
$P(\omega)$						

et

x_i	1	5
$P(X = x_i)$		

dans ce cas :

- $P(X = 1) =$
- $P(X = 5) =$

d'où :

$E(X) =$

$=$

$=$

Propriété

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad \text{et} \quad E(aX) = aE(X)$$

et

$$V(aX) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et une pièce de 1 euros. L'expérience aléatoire est donc le lancé des deux éléments (la pièce et le dés).

Soient X la variable aléatoire qui associe à chaque issue (Chaque lancé des deux éléments) le résultat du dé et Y la variable aléatoire qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.

Dans les tableaux suivants, chaque case représente une issue.

Pour X :

pièce\dé	1	2	3	4	5	6
pile						
face						

et pour Y :

pièce\dé	1	2	3	4	5	6
pile						
face						

On a donc :

$E(X) =$

et

$E(Y) =$

D'où, en utilisant la propriété :

$$E(X+Y) = \qquad\qquad\qquad \text{et } E(4X) =$$

Remarques

- $\forall b \in \mathbb{R}, E(X+b) = E(X) + b$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$
- $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$

III Variables aléatoires indépendantes

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, ... , X_n, n variables aléatoire définies sur un univers Ω et à valeurs respectivement dans $E_1, E_2, ..., E_n$.
On dit que X_1, X_2, ... , X_n sont **indépendantes** si pour tout $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ... , $x_n \in E_n$, on a :

$$P\big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap ... \cap (X_n = x_n)\big) = P(X_1 = x_1) \times P(X_2 = x_2) \times ... \times P(X_n = x_n)$$

Exemple

Dans l'exemple précédent où on lance un dé à 6 faces et une pièce de 1 euros, X étant la variable aléatoire qui associe à chaque issue le résultat du dé et Y celle qui associe à chaque issue 1 si la pièce tombe sur pile et -2 si elle tombe sur face.
On a pour tout $(i;j) \in [\![1;6]\!] \times \{1;-2\}$, on a

$$P\big((X=i) \cap (Y=j)\big) = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad P(X=i) \times P(Y=j) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

D'où l'indépendance de X et Y.

Propriété (admise)

Soient X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur un univers Ω et a un nombre réel.

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, on a :
$V(X) =$
$\quad =$
$\quad =$
et
$V(Y) =$
$\quad =$
$\quad =$

D'où, en utilisant la propriété :

$$V(4X) = 4^2 \times \frac{31}{12} = \frac{124}{3}$$

De plus, X et Y étant

$$V(X+Y) =$$

Démonstration

Voir exercices

IV Somme de variables aléatoires identiquement distribués

1 Variables aléatoires identiquement distribués

Définition

On dit que deux variables aléatoires sont identiquement distribuées lorsqu'elles ont la même loi de probabilité.
Autrement dit, avec X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω et à valeur dans $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$
X et Y sont identiquement distribuées si pour tout entier naturel $i \in [\![1; n]\!]$, on a :

$$P(X = r_i) = P\big(Y = r_i\big)$$

Exemple

Une roue de loterie comporte 4 secteurs angulaires égaux. Les deux premiers secteurs valent 300 points, le troisième vaut 100 points et le dernier vaut -400 points.
On fait tourner la roue 4 fois de suite et on gagne la somme de points obtenus lors des 4 lancés.
L'expérience aléatoire est donc la succession des quatre lancers.
Soit X_i la variable aléatoire qui associe à chaque issue (4 lancers de roue) le gain du i^{eme} lancer de roue pour i allant de 1 à 4.
X_1, X_2, X_3 et X_4 ont donc la même loi de probabilité, elle sont donc identiquement distribuées.

2 Somme de variables aléatoires identiquement distribués

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, ... , X_n, n variables aléatoires définies sur un univers Ω.
On suppose que ces variables aléatoires sont **indépendantes et identiquement distribuées**, et qu'elles ont **la même loi de probabilité** qu'une variable aléatoire X.
On dit dans ce cas que $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ est un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

Propriétés

Soit $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ la somme d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X, on a alors :

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variable aléatoire X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et identiquement distribuées et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$	0,5	0,25	0,25

On a donc :

$$E(X) =$$

$$V(X) =$$

Par conséquent :

- $E(S_4) =$
- $V(S_4) =$
- $\sigma(S_4) =$

Démonstration

En effet, avec les notations de la propriété, on a :

- $E(S_n) =$
  $=$
  $=$
  $=$
- Les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ étant
  $V(S_n) =$
  $=$
  $=$
  $=$
- $\sigma(S_n) =$

Propriétés

Soit $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ **la moyenne** d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire X. On a alors :

- $E(M_n) = E(X)$

- $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, les quatre variable aléatoire X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et identiquement distribuées et forment un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau ci-dessous :

x_i	300	100	-400
$P(X = x_i)$	$0,5$	$0,25$	$0,25$

On a donc :

$$E(X) = 75$$

$$V(X) = 81875$$

Par conséquent :

$E(M_4) =$ $\qquad$ $V(M_4) =$ $\qquad$ $\sigma(M_4) =$

Démonstration

En effet, avec les notations de la propriété, on a :

- $E(M_n) = E\left(\dfrac{1}{n} \times S_n\right) = \dfrac{1}{n} \times E\left(S_n\right) = \dfrac{1}{n} \times nE\left(X\right) = E(X)$
- $V(M_n) = V\left(\dfrac{1}{n} S_n\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 V\left(S_n\right) = \dfrac{1}{n^2} \times nV\left(X\right) = \dfrac{V\left(X\right)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \sqrt{V(M_n)} = \sqrt{\dfrac{V(X)}{n}} = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$