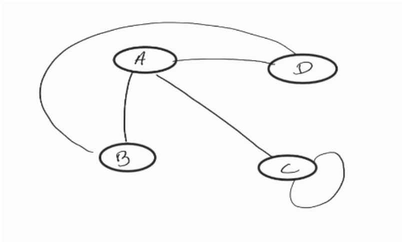
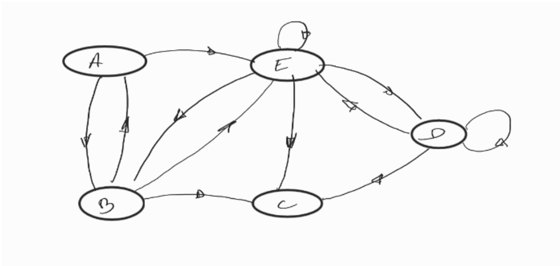
Graphes et matrices

Exercice 1

Pour chaque graphes ci dessous :

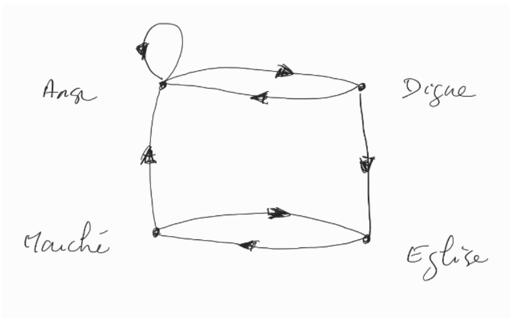




1. Déterminer la matrice d'adjacence M
2. Déterminer M^3
3. En déduire le nombre de chemin de longueur 3 reliant le sommet B au sommet D.

Exercice 2

Ce graphe représente les chemin de randonnée de 1 km dans un village de Bretagne.



1. Ecrire la matrice d'adjacence M du graphe en conservant l'ordre alphabétique des lieux.
2. A l'aide de la calculatrice, déterminer M^5.
3. En déduire le nombre de chemin de randonnée de longueur 5km allant de l'anse a l'église.

Exercice 3

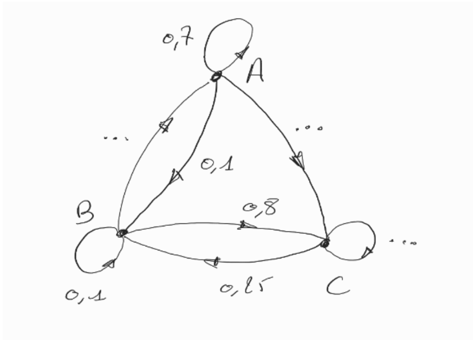
Le chat Melkior a pour habitude de dormir soit sur une armoire, soit dans son panier.

- S'il dort une nuit sur l'armoire, la probabilité qu'il dorme sur l'armoire la nuit suivante est égale à 0,3.
- S'il dort une nuit dans son panier, la probabilité qu'il dorme sur l'armoire la nuit suivante

est égale à 0,1.

traduire l'énoncé par un graphe pondéré puis donner la matrice de transition de ce graphe.

Exercice 4



1. Recopier et compléter le graphe pondéré associé à une chaîne de Markov à 3 état.
2. Déterminer la matrice de de transition en conservant l'ordre alphabétique des sommets.
3. La distribution initiale est $\Pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer la distribution Π_7.

Exercice 5

Les services commerciaux d'une grande surface de produit alimentaire ont défini un profil de clients qui a été appelé "consommateur bio".
Sur la base d'observations réalisées les années précédentes, on a constaté que 90% des clients "consommateur bio" maintenaient cette pratique l'année suivantes et que 15% des clients n'ayant pas ce profil de consommateur bio entraient dans cette catégorie l'année suivante.
On suppose dans le modèle que cette évolution se poursuit d'une année sur l'autre.

1. Construire le graphe pondéré associé à la chaîne de Markov traduisant cette situation avec pour sommets :
   - B : "le client est un consommateur bio"
   - $\overline{B}$: "le client n'est pas un consommateur bio"
2. Déterminer la matrice de transition associée à cette chaîne de Markov
3. Déterminer la distribution invariante de cette chaîne.

Exercice 6

On étudie l'évolution quotidienne des conditions météorologiques d'un village sur une certaine période. On suppose que, pour un jour donné, il existe trois états météorologiques possibles : « ensoleillé », « nuageux sans pluie » et « pluvieux ».
On sait que :

- si le temps est ensoleillé un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,5$ et celle qu'il soit pluvieux est $0,1$;
- si le temps est nuageux sans pluie un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,2$ et celle qu'il soit pluvieux est $0,7$;
- si le temps est pluvieux un jour donné, la probabilité qu'il le soit encore le lendemain est $0,6$ et celle qu'il soit ensoleillé $0,2$.

Pour tout entier naturel n, on note les évènements :

- A_n : « le temps est ensoleillé au bout de n jours » ;
- B_n : « le temps est nuageux sans pluie au bout de n jours » ;
- C_n : « le temps est pluvieux au bout de n jours ».

Pour tout entier naturel n, on note respectivement a_n, b_n et c_n les probabilités des évènements A_n, B_n et C_n. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$.
On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé.
On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. (a) Traduire l'énoncé par un graphe probabiliste associé à la chaîne de Markov à trois état :
   - A : jour ensoleillé
   - B : jour nuageux sans pluie
   - C : jour pluvieux

   (b) Déterminer la matrice de transition T associée au graphe.

   (c) En déduire que pour tout entier naturel n,
   - $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,1b_n + 0,2c_n$.
   - $b_{n+1} = 0,4a_n + 0,2b_n + 0,2c_n$.
   - $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,7b_n + 0,6c_n$.

   On suppose qu'initialement, le temps est ensoleillé.
   On a donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$, c'est à dire que la distribution initiale est :

$$\Pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer à la calculatrice T^5.
3. En déduire la probabilité qu'il pleuvent 5 jours après le jour initiale.

Exercice 7

On considère les matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On considère la suite (U_n) de matrices colonnes définies par :
$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A.U_n + B$.

1. Justifier que la matrice C vérifie l'égalité :

$$C = A.C + B$$

2. On définit la suite (V_n) de matrices colonne par la relation : $V_n = U_n - C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   (a) Justifier l'égalité : $V_{n+1} = A.V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

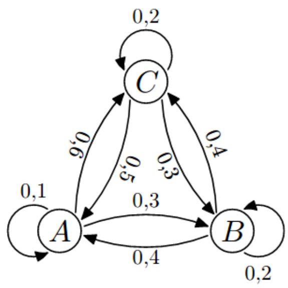
   (b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$U_n = \begin{pmatrix} 3^{n+2} - 9 \times 2^n + 1 \\ 3 \times 2^n - 1 \end{pmatrix}$$

.

Exercice 8

Le graphe ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :
On note a_n, b_n et c_n les probabilités associées à chacun des états à l ?étape n.



Les valeurs initiales sont : $a_0 = 0,5$; $b_0 = 0,2$ et $c_0 = 0,3$

1. Donner la matrice T de transition associée à ce graphe probabiliste vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \times T$$

2. A l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs associées à chacun de ses états à la troisième étape. On arrondira les résultats au millième près.

Exercice 9

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la manière suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. (a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=0\right), P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=1\right) \text{ et } P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=2\right).$$

$$P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=0\right), P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right) \text{ et } P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=2\right).$$

$$P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=0\right), P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=1\right) \text{ et } P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=2\right).$$

   (b) Représenter cette situation par un graphe probabiliste associée à la chaîne de Markov $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = \begin{pmatrix} P\left(X_n=0\right) & P\left(X_n=1\right) & P\left(X_n=2\right) \end{pmatrix}$$

   On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer la matrice de transition M associé au graphe probabiliste et telle que :

$$R_{n+1} = R_n \times M$$

(b) Calculer R_1.

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$R_n = R_0 \times M^n$$

3. Soit P la matrice définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que :

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer la matrice D définie par :

$$D = P^{-1}MP$$

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $D^n = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

4. (a) Déterminer M^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$.
Interpréter ces résultats.

Exercice 10

On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) dont les termes vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n, la matrice colonne X_n définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ; \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation $X_{n+1} = A.X_n + B$
2. (a) Déterminer $(I_2 - A)^{-1}$

(b) Déterminer la matrice X telle que : $X = A.X + B$

3. On considère la suite (Vn) de matrice-colonne définie par $V_n = X_n - X$ Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_n = A^n.V_0$
4. On considère la matrice carrée P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

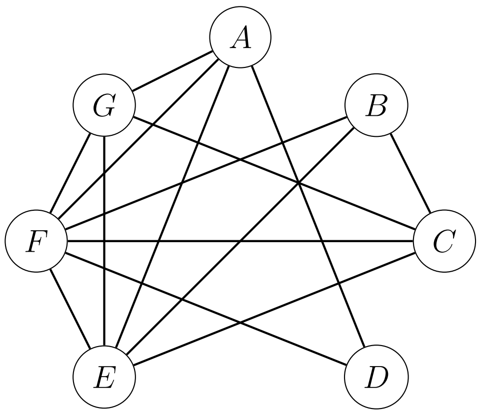
   (a) Déterminer la matrice inverse de P.

   (b) On note D la matrice définie par $D = P^{-1}.A.P$.
   Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n non nul.

   (c) En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.
5. On prend comme valeur initiale des suites : $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$.
   Que peut-on dire sur la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

Exercice 11

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle. A ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale : Luther Allunison (A), John Biaise (B), Phil Colline (C), Bob Ditlâne (D), Jimi Endisque (E), Robert Fripe (F) et Rory Garaguerre (G).
Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe G ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.



1. Déterminer la matrice associée au graphe G (les sommets de G étant classés dans l'ordre alphabétique).
2. Quelle est la nature du sous-graphe de G constitué des sommets A, E, F et G ? Que peut-on en déduire pour le nombre minimale de couleur c(G) nécessaires pour colorier le graphe G ?
3. Quel est le sommet de plus haut degré de G ? En déduire un encadrement de c(G).
4. Après avoir classé l'ensemble des sommets de G par ordre de degré décroissant, colorier le graphe G.
5. Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ?
   Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.